Problemas de Espacios Vectoriales

1. ¿Qué condiciones tiene que cumplir un súbconjunto no vacío de un espacio vectorial para que sea un subespacio vectorial de este? Pon un ejemplo.

Solución

Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($\Re$ nº. Reales). Todo súbconjunto V de E, que tenga estructura de espacio vectorial con las mismas leyes de E, diremos que es un subespacio vectorial de E.

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que V sea subespacio vectorial de E, es que se verifique:

$$\forall x,y\in V;\lambda,\mu\in K \;\Rightarrow\; \lambda x+\mu y\in V$$

2. ¿Existe algún vector que sea combinación lineal de cualquier conjunto de vectores? Razona la respuesta.

Solución

Si. El vector nulo. Todo sistema S que contenga al vector 0 es ligado y por tanto uno cualquiera de sus elementos se puede escribir como combinación lineal de los restantes.

3. ¿Es cierto que un vector es combinación lineal de si mismo? Pon un ejemplo.

Solución

Si. $\overline{U} = 1\cdot\overline{U}$

4.¿Cuál será el espacio engendrado por los vectores (2, 3, 4) y (6, 9, 12)? ¿Qué dimensión tienen dicho subespacio?.

Solución

Para definir un espacio vectorial, solo se utilizan los vectores linealmente independientes.

Vectorial ≡ (x, y, z) = (2, 3, 4)·λ; Despejando por componentes se obtienen las Parámetricas $\equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$;

Despejando el parámetro e igualando dos a dos se obtienen la Implícita $\equiv \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

Su dimensión es igual al número de elementos que tenga una cualquiera de sus bases. En este caso Una base seria: B = {(2,3,4)} Dim. = 1

5. Razona, con ejemplos, cuándo dos vectores de R^2 son linealmente dependientes o independientes. ¿Qué relación tienen que verificar las componentes de cada caso?.

Solución

Linealmente dependientes ó ligados: (1,2), (2,4), (–1,–2),... Proporcionales
Linealmente independientes: (1,2), (2,3). No proporcionales

6. En R^2:

i. dos vectores cualesquiera son siempre linealmente independientes, ¿es cierto?
ii. el número máximo de vectores linealmente independientes es 2, ¿es cierto?

Razona las respuestas.

Solución

i. No. Si los dos vectores son proporcionales, el conjunto es L.D.
ii. Si. El máximo número de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial coincide con su dimensión. Por lo tanto en R^2 el máximo número de vectores independientes es 2.

7. Razona mediante ejemplos, cuando dos vectores de R^3 son linealmente dependientes o independientes. ¿Qué relación tienen que verificar las componentes en cada caso?.

Solución

U = (1,2,3), $\overline{V}$ = (2,4,6); $2\,\overline{U} - \overline{V} = 0$. Proporcionalidad.

8. ¿Qué significa que un conjunto de vectores sea libre? Razona si son linealmente dependientes los vectores:

$$\bar{u},\ \bar{v}\ \text{y}\ 2\bar{u} + \bar{v}.$$

Solución

Un sistema S de vectores es libre, diciéndose también que los vectores $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ son linealmente independientes, cuando:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_n = 0$$

Ó, dicho de otra forma, no podemos escribir uno como combinación lineal de los restantes.

Los vectores u, $\bar{v}$ y $2\bar{u} + \bar{v}$ no son linealmente dependientes porque el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros.

9. Si un conjunto de vectores contiene al vector nulo, ¿es libre o obligado? Razona tu contestación con un ejemplo.

Solución

Es ligado. Siempre existirá un conjunto de números Reales no todos nulos, tal que una combinación lineal con estos valores nos dé cero.

$$0\cdot\vec{U}_1 + 0\cdot\vec{U}_2 + \ldots + \alpha\cdot\vec{0} + \ldots + 0\cdot\vec{U}_n = \vec{0} \qquad \forall \alpha \neq 0$$

10. ¿Es siempre cierto que un vector es linealmente independiente? ¿Y si se trata del vector nulo?.

Solución

a) Si.
b) Si. El razonamiento es igual que en el problema 3.

11. ¿Qué condiciones debe cumplir un conjunto de vectores para que sea una base del espacio vectorial?.

Solución

Debe de cumplir dos condiciones:

i) Debe ser un sistema generador de dicho espacio vectorial, es decir, debe ser capaz de generar cualquier vector de dicho espacio mediante combinación lineal de los vectores del conjunto.
ii) Los vectores del conjunto deben ser linealmente independientes.

12. ¿Puede tener un vector distintas coordenadas respecto de la misma base? ¿Y respecto de bases distintas? Pon un ejemplo.

Solución

a) No. Si un subconjunto B es base de un conjunto V, cualquier elemento de V debe tener una expresión única respecto de B
b) Si.

Ejemplo: Sea $\bar{a}$ = (1,2,3) y sean $B_1 = \{\bar{U}_1=(1,0,0),\ \bar{U}_2=(0,1,0),\ \bar{U}_3=(0,0,1)\}$; $B_2 = \{\bar{V}_1=(1,1,1),\ \bar{V}_2=(0,1,1),\ \bar{V}_3=(0,0,1)\}$ dos bases de R^3

Respecto de B_1: $\bar{a} = \bar{U}_1 + 2\bar{U}_2 + 3\bar{U}_3$; $\bar{a} = (1,2,3)_1$

Respecto de B_2: $\bar{a} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3$; $\bar{a} = (1,1,1)_2$

13. Si un espacio vectorial tiene dos bases distintas, ¿es posible que dichas bases tengan distinto número de elementos?

Solución

Imposible. Todas las bases de un espacio vectorial, deben tener el mismo número de elementos, que además coincide con la dimensión del subespacio.

14. Determinar los valores de a y b para que el vector (1, 4, a, b) sea combinación lineal de los vectores (1, 2, – 1, 2) y (0, 1, 2, 1)

Solución

$$(1, 4, a, b) = \alpha(1, 2, -1, 2) + \beta(0, 1, 2, 1)$$
$$(1, 4, a, b) = (\alpha, 2\alpha+\beta, -\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta)$$
$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 4 = 2\alpha + \beta \\ a = -\alpha + 2\beta \\ b = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene, α=1 y β=2, por lo quede la tercera y cuarta se obtiene: a=3 y b=4

15. Determinar los valores de a y b para que el vector (a, -2, 1, b) sea linealmente independiente de los vectores (1, 2, 3, 4) y (-1, 0, -2, 3).

Solución

Si tres vectores son linealmente independientes, entonces uno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros dos. Aplicando al ejemplo:

$$(a,-2,1,b) = \alpha(1,2,3,4)+\beta(-1,0,-2,3)$$
$$\begin{cases} a = \alpha - \beta \\ -2 = 2\alpha \\ 1 = 3\alpha - 2\beta \\ b = 4\alpha + 3\beta \end{cases}$$

De la segunda se obtiene, $\alpha = -1$, sustituyendo en la tercera, $\beta = -2$ y llevando estos valores a la primera y cuarta se obtiene que a = 1 y b = –10

16. Demostrar que los vectores (a, b) y (c, d) son linealmente dependientes si, y solo si, ad – bc = 0.

Solución

Si son L.D. deben cumplir:

$$\alpha\cdot(a,b) + \beta\cdot(c,d) = 0 \quad \text{operando:} \quad (a,b) = K\cdot(c,d) \text{ siendo } K = -\beta/\alpha$$

Operando por componentes e igualando: $\left\{\begin{matrix} a = K\cdot c \\ b = K\cdot d \end{matrix}\right\} \Rightarrow K = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ordenando la última igualdad:

$$a\cdot d - c\cdot b = 0$$

17. Sea el espacio vectorial R² ¿cuáles de los siguientes subconjuntos constituyen subespacios vectoriales con las operaciones indicadas?

1) A = {(x, y) / x – y = 0} **SI**
2) B = { (x, y) / x – y = 1} **NO**
3) C = { (x, y) / x + y = 0} **SI**
4) D = {(x, y) / x = 1} **NO**
5) E = {(x, y) / x · y = 0} **NO**
6) F = {(x, y, z) / x = y + z} **SI**

Solución

Para que un subconjunto de un espacio vectorial sea subespacio vectorial, una combinación lineal de dos elementos del subespacio también debe pertenecer la subespacio

18. En R^3 determinar el subespacio vectorial generado por (1, 2, 5). Dar tres vectores del citado subespacio.

Solución

$$(x, y, z) = (1, 2, 5)\cdot\lambda$$
$$(1, 2, 5), (-1, -2, -5), (2 ,4, 10)$$

19. ¿Pertenece el vector (2, 1, 3, -7) al subespacio engendrado por (1, 3, 3, 0) y (2, 1, 5, 2).

Solución

Si el vector (2, 1, 3, –7) ∈ al subespacio engendrado por los vectores (1, 3, 3, 0) y (2, 1, 5, 2), entonces deberá poder escribirse como una C.L. de ellos:

$$(2,1,3,-7) = \alpha\cdot(1,3,3,0) + \beta\cdot(2,1,5,2)$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 2\beta \\ 3 = 3\alpha + 5\beta \\ -7 = 2\beta \end{cases}$$

Los valores de $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{5}{4}$ que cumplen las dos primeras ecuaciones, no verifican las dos últimas. Sistema incompatible.

También se puede estudiar por rangos:

rg A = 2 ≠ rg A* = 3. Sistema incompatible. No pertenece.

20. Comprobar si los vectores (1, 2, 3) (4, 5, 6) y (7, 8, 9) de R³ son linealmente independientes.

Solución

$\overline{U}_1 = (1,2,3)$	$\overline{U}_1 = (1,2,3)$	$\overline{U}_1 = (1,2,3)$
$\overline{U}_2 = (4,5,6)$	$\overline{V}_2 = \overline{U}_2 - 4\overline{U}_1 = (0,-3,-6)$	$\overline{V}_2 = (0,-3,-6)$
$\overline{U}_3 = (7,8,9)$	$\overline{V}_3 = \overline{U}_3 - 7\overline{U}_1 = (0,-6,-12)$	$\overline{W}_3 = \overline{V}_3 - 2\overline{V}_2 = (0,0,0)$

Teniendo en cuenta las expresiones de $\overline{V}_2$ y $\overline{V}_3$ en función de $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ y $\overline{U}_3$

$$W_3 = 0 = \overline{V}_3 - 2\overline{V}_2 = \overline{U}_3 - 7\overline{U}_1 - 2[\overline{U}_2 - 4\overline{U}_1]$$

Operando y simplificando

$$\overline{U}_1 - 2\overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 0$$

Linealmente dependientes.

21 Indicar para qué valores de t los vectores u = (1, 1, 1), v = (2, 2, t) y w = (t, 0, 0) no forman una base de R³.

Solución

Para que un conjunto de vectores puedan forman base, deben ser linealmente independientes. Para que un conjunto de n vectores sean linealmente independientes el rango de la matriz formada con ellos debe ser n

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t\cdot(t-2) = 0$$

Para t = 0 ó t = 2 no forman una base, por ser L.D.

22. Decir si el vector (2,1,3,0) de R^4 pertenece o no al subespacio engendrado por los vectores (–1, 2, 3, 4) y (0, 1, –1, 2).

Solución

$$(2, 1, 3, 0) = \alpha\cdot(-1, 2, 3, 4) + \beta\cdot(0, 1, -1, 2)$$

$$3 = 3\alpha - \beta \quad \begin{cases} 2 = -\alpha \\ 1 = 2\alpha + \beta \\ 3 = 3\alpha - \beta \\ 0 = 4\alpha - 2\beta \end{cases} \quad \text{Sistema Incompatible. No tiene solución}$$

El vector (2,1,3,0) no pertenece al subespacio engendrado por los vectores (–1, 2, 3, 4) y (0, 1, –1, 2).

23. Hallar la expresión general de todos los vectores de R^4 que son combinación lineal de los vectores (2, 0, 1, 3) y (0, -3, 1, 5).

Solución

$$(x, y, z, t) = \alpha\cdot(2, 0, 1, 3) + \beta\cdot(0, -3, 1, 5) \quad \forall\alpha, \beta \in \Re$$

$$(x, y, z, t) = (2\alpha, -3\beta, \alpha+\beta, 3\alpha+5\beta) \quad \forall\alpha, \beta \in \Re$$

24. Sabiendo que el conjunto de vectores $\{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\}$ es un sistema libre del espacio vectorial $(V, +, \cdot R)$, demostrar que el conjunto $\{\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{z}, \overline{y} + \overline{z}\}$ es también un sistema libre del mismo espacio.

Solución

Supongamos que no lo sea. Existirían escalares α, β, γ no todos nulos tales que:

$$\alpha\cdot(\overline{x} + \overline{y}) + \beta\cdot(\overline{x} + \overline{z}) + \gamma\cdot(\overline{y} + \overline{z}) = 0$$

Operando y ordenando x, y, z.

$$(\alpha+\beta)\ \overline{x} + (\alpha+\gamma)\ \overline{y} + (\beta+\gamma)\ \overline{z} = 0$$

teniendo en cuenta que x, y, z son linealmente independientes deberán cumplir:

$$\alpha+\beta=0,\ \alpha+\gamma=0 \text{ y } \beta+\gamma=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

lo que prueba la independencia de $\overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x} + \overline{z}$, $\overline{y} + \overline{z}$.

25. ¿Cuál es la condición que debe cumplir el vector (x, y, z) de R^3 para que no forme una base junto con los vectores (-2, 1,0) y (3, -1, 5)?

Solución

Debe ser combinación lineal de ellos.

$$(x, y, z) = \alpha\cdot(-2, 1, 0) + \beta\cdot(3, -1, 5),\ \forall\alpha, \beta \in \Re$$

26. Demostrar que el súbconjunto S de R^4 definido por;

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \ /\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

es un subespacio vectorial de R^4 y calcular la dimensión y una base de S.

Solución

a) Veamos que S es un subespacio vectorial de R^4.

Sean $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ dos elementos de S, entonces:

$$\overline{x} - \overline{y} = (x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3, x_4-y_4)$$

elemento que cumple la ecuación del subespacio ya que:

$$x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0 - 0 = 0$$

luego x–y es un elemento de S

De igual forma para el producto por escalares:

$$\lambda\cdot\overline{x} = \lambda\cdot(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = \lambda\cdot(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \lambda\cdot 0 = 0$$

se sigue que $\lambda\cdot\overline{x}$ es un elemento de S. Por tanto S es un subespacio vectorial de R^4.

b) La dimensión de un subespacio es igual al número de componentes que tienen los elementos que lo forman menos el número de ecuaciones que los liga al subespacio. Dimensión = 4 – 1 = 3. Para sacar una base, se expresa el subespacio en paramétricas, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones. En este caso:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

1 ecuación, 4 incógnitas, luego requiere tres parámetros para su resolución.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 : \begin{cases} x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_3 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta - \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_3 = \gamma \end{cases}$$

Dando valores a los parámetros se obtienen vectores linealmente independientes. Como el subespacio tiene tres dimensiones, una cualquiera de sus bases estará formada por tres vectores del subespacio linealmente independientes

$$\text{Para: } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \bar{u} = (-1, 1, 0, 0)$$

$$\text{Para: } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \bar{v} = (-1, 0, 1, 0)$$

$$\text{Para: } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad \bar{w} = (-1, 0, 0, 1)$$

Una base del subespacio será:

$$B = \{ \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \}.$$

27. Demostrar que los vectores (1, a) y (1, b) del espacio vectorial (R^2, +, ·R) constituyen una base del mismo si y solo si $a \neq b$.

Solución

Para que formen una base deben ser linealmente independientes, y eso en R^2 implica que no deben ser proporcionales.

$$1/1 \neq a/b \Rightarrow a \neq b$$

28. Calcular la dimensión del subespacio de R^4 engendrado por el sistema {(–1, 0, –4, 1), (2, 1, –3, 0), (0, 1, 0, 5)}.

29. Calcular el valor de x de modo que:

a) (x, x, x) pertenezca al subespacio de R^3 engendrado por los vectores (2, 1, -2) y (-1, 3, 4).
b) (x, x, x) forme una base de R^3 junto con los vectores del apartado anterior.

Solución

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 11x$$

a) Si x=0, rango dos, es decir dos vectores linealmente independientes, y por tanto uno de ellos se puede poner como C.L. de los otro.
b) Si x≠0, rango 3, linealmente independientes. Forman una base.

30. Sabiendo que el sistema F = { (1, 0, -1), (2, 1, 1) y (-2, 0, 2) es un sistema ligado de R^3, decir si se puede suprimir un vector cualquiera de F sin que varíe el subespacio engendrado por F.

Solución

No . Solamente si eliminamos el primer o tercer vector, obtenemos el mismo subespacio.